الوحدة04: ثلاثيات الحدود من الدرجة الثانية

الكفاءات القاعدية

- إنشاء التمثيل البياني للدالة $(a \neq 0), x \to ax^2 + bx + c$
- تحديد جذور ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية وإشارته إعتمادا على التمثيل البياني للدالة $(a \neq 0), x \to ax^2 + bx + c$

الشكل النموذجي

المميز

العبارة المحللة

حل معادلة من الدرجة الثانية باستعمال التمثيل البياني للدالة $(a \neq 0), x \to ax^2 + bx + c$

حل معادلة من الدرجة الثانية جبريا

تصميم الدرس

أنشطة

1/ تعريف:

2/ الشكل النموذجي لكثير حدود من الدرجة الثانية، مميز كثير حدود من الدرجة الثانية:

3/ جدول تغيرات دالة كثير حدود من الدرجة الثانية وتمثيلها بيانيا:

4/ المعاملات من الدرجة الثانية، تحليل كثير حدود من الدرجة الثانية:

5/ إشارة كثير حدود من الدرجة الثانية:

تمارين ومشكلات حول الوحدة 4

حلول التمارين والمشكلات حول الوحدة 4

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

النشاط 01 : مربعات !!

- **الأسئلة :**

d, y, x أعداد حقيقية

1) أكمل المساويات التالية:

$(1).....x^2 + 2x + 1 = ()^2$

$(2).....x^2 - 4x + ... = ()^2$

$(3)....x^2 + 2xy + ... = ()^2$

$(4)....x^2 + dx + ... = ()^2$

2) حلل إلى جداء عاملين كل واحدة من العبارتين $A(x)$ و $B(x)$ التاليتان:

$A(x) = x^2 - 6x + 8$ ، $B(x) = 3x^2 + x - 2$

- **الأجوبة والملاحظة:**

اعتمادا على " الجداءات الشهيرة"

$(1).....x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$

$(2).....x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

$(3)....x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$

وللاقتراب من الجداءات الشهيرة، نستعمل المساواة $d = 2.\frac{d}{2}$

هكذا: $x^2 + dx = x^2 + 2.\left(\frac{d}{2}\right)(x)$

و $x^2 + 2.\left(\frac{d}{2}\right)(x)$ هو "بداية" نشر $\left(x + \frac{d}{2}\right)^2$

هكذا: $x^2 + dx + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{d}{2}\right)^2$

جميع الحقوق محفوظة ©

- $A(x) = (x^2 - 6x) + 8$

و $x^2 - 6x$ هو بداية نشر $(x-3)^2$ ولكن $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$

منه $x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9$

هكذا: $A(x) = ((x-3)^2 - 9) + 8$

أي: $A(x) = (x-3)^2 - 1$

أي $A(x) = (x-3)^2 - 1^2$

أي $A(x) = [(x-3)-1][(x-3)+1]$

وفي الأخير: $A(x) = (x-4)(x-2)$

$$B(x) = 3\left[\left(x^2 + \frac{1}{3}x\right) - \frac{2}{3}\right]$$

و $x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = x^2 + 2.\frac{1}{6}x - \frac{2}{3}$

ومثل ما سبق $x^2 + 2\left(\frac{1}{6}\right)(x)$ هو بداية نشر $\left(x + \frac{1}{6}\right)^2$

ولكن $\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{36}$ منه $\left(x^2 + \frac{1}{3}x\right) = \left(\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{36}\right)$

$$B(x) = 3\left[\left(\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{36}\right) - \frac{2}{3}\right]$$

$= 3\left[\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{25}{36}\right]$ (توحيد مقامي $\frac{1}{36}$ و $\frac{2}{3}$)

$$= 3\left[\left(x + \frac{1}{6}\right) - \frac{5}{6}\left(\left(x + \frac{1}{6}\right) + \frac{5}{6}\right)\right]$$

$$= 3\left[\left(x - \frac{2}{3}\right)\right][x+1]$$

$$B(x) = (3x-2)(x+1)$$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

¶ ملاحظة:

بصورة عامة x^2+dx هو بداية نشر $\left(x+\frac{d}{2}\right)^2$

ولكن: $\left(x+\frac{d}{2}\right)^2=x^2+dx+\left(\frac{d}{2}\right)^2$ منه: $x^2+dx=\left(x+\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2$ .....(*)

النشاط 02: ثنائي الحين من الدرجة الأولى

- **المعطيات والسؤال:**

ليكن a و b عددين حقيقيين مفروضين بحيث: $a\neq 0$ لتكن f الدالة المعرفة على R بالدستور: $f(x)=ax+b$

أدرس إشارة $f(x)$ ، حسب قيم x

ولخص ذلك في جدول في كل حالة من الحالتين: $a<0, a>0$

- **الجواب والملاحظات:**
- في الحالة $a>0$:

$(ax+b=0)$ يعني $(ax=-b)$ وهذا يعني: $\left(x=-\frac{b}{a}\right)$

$(ax+b>0)$ يعني $(ax>-b)$ وهذا يعني: $\left(x>-\frac{b}{a}\right)$

$(ax+b<0)$ يعني $(ax<-b)$ وهذا يعني: $\left(x<-\frac{b}{a}\right)$

جميع الحقوق محفوظة ©

منه : في الحالة $a > 0$: الدراسة تلخص في الجدول

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
إشارة $ax+b$	-	0	+

- في الحالة $a < 0$:

$(ax+b=0)$ يعني $x=-\frac{b}{a}$

$(ax+b>0)$ يعني $\left(x<-\frac{b}{a}\right)$ لأن a سالب تماما

$(ax+b<0)$ يعني $\left(x>-\frac{b}{a}\right)$

منه في الحالة $a < 0$ الدراسة تلخص في الجدول

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
إشارة $ax+b$	+	0	-

¶

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

ملاحظة: نتيجة

نسمي دالة ثنائي الحدين من الدرجة الأولى كل دالة f معرفة على R بدستور من الشكل $f(x)=ax+b$ أين a و b عددان حقيقيان مفروضان بحيث $a \neq 0$ وعندئذ العبارة $ax+b$ تسمى ثنائي الحدين من الدرجة الأولى (أو كثير حدود من الدرجة الأولى) للمتغير الحقيقي x

إذا كان a و b عددين حقيقيين مفروضين بحيث: $a \neq 0$

إشارة $ax+b$ حسب قيم المتغير الحقيقي x تلخص حسب الجدول التالي:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
إشارة $ax+b$	عكس إشارة a	0	نفس إشارة a

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

1/ تعريف:

نسمي دالة ثلاثي حدود من الدرجة الثانية (أو دالة كثير حدود من الدرجة الثانية) كل دالة f معرفة على R بدستور من الشكل $f(x)=ax^2+bx+c$ أين a ، b ، c أعداد حقيقية مفروضة بحيث $a\neq 0$ وعندئذ العبارة ax^2+bx+c تسمى ثلاثي حدود من الدرجة الثانية(أو كثير حدود من الدرجة الثانية) للمتغير الحقيقي x

2/ الشكل النموذجي لكثير حدود من الدرجة الثانية، مميز كثير حدود من الدرجة الثانية:

أ. الشكل النموذجي لكثير حدود من الدرجة الثانية:

لتكن a ، b ، c أعداد حقيقية مفروضة بحيث $a\neq 0$ لتكن f الدالة المعرفة على R بالدستور: $f(x)=ax^2+bx+c$ ،

من أجل كل قيمة للمتغير x في R لدينا:

$$f(x)=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]$$ (وضع a عامل في جداء)

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]$$ (حسب الملاحظة في النشاط 1)

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]$$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right]$$

مبرهنة وتعريف:

لتكن a ، b ، c أعداد حقيقية مفروضة بحيث $a \neq 0$

من أجل كل قيمة للمتغير x في R لدينا:

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right]$$

$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right]$ التي هي عبارة أخرى لكثير الحدود ax^2+bx+c

يسمى الشكل النموذجي لكثير الحدود ax^2+bx+c

ب. تعريف، ترميز:

ليكن ax^2+bx+c كثير حدود للمتغير الحقيقي x أين a ، b ، c أعداد حقيقية مفروضة بحيث $a \neq 0$

العدد الحقيقي b^2-4ac يسمى مميز كثير الحدود ax^2+bx+c ويرمز إليه بالرمز Δ

مثلا:

ليكن $f(x)$ و $g(x)$ كثيري الحدود للمتغير الحقيقي x حيث:

$f(x)=-3x^2+6x-3$ و $g(x)=x^2-6x+11$

* $f(x)$ من الشكل ax^2+bx+c مع $a=-3$ ، $b=6$ ، $c=-3$

Δ مميز $f(x)$ بحيث: $\Delta=b^2-4ac$ منه $\Delta=6^2-4(-3)(-3)$ منه $\Delta=0$

http://www.onefd.edu.dz

ولكتابة $f(x)$ على الشكل النموذجي: $f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$ ولنا

$\frac{b}{2a}=-1$ و $\frac{\Delta}{4a^2}=0$

منه: $f(x)=-3(x-1)^2$

الشكل النموذجي لكثير الحدود $f(x)$

* $g(x)$ من الشكل ax^2+bx+b مع $a=1$ ، $b=-6$ ، $c=11$

Δ مميز $g(x)$ بحيث: $\Delta=b^2-4ac$ منه $\Delta=(-6)^2-4(1)(11)$ منه

$\Delta=-8$

ولكتابة $g(x)$ على الشكل النموذجي: $g(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$ ولنا

$\frac{b}{2a}=-3$ و $\frac{\Delta}{4a^2}=-2$

منه $g(x)=(x-3)^2+2$

الشكل النموذجي لكثير الحدود $g(x)$

3/ جدول تغيرات دالة كثير حدود من الدرجة الثانية وتمثيلها بيانيا:

لتكن a ، b ، c أعداد حقيقية مفروضة بحيث $a\neq 0$ لتكن f الدالة المعرفة على R بالدستور: $f(x)=ax^2+bx+c$ ، لدينا: $f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$

أين $\Delta=b^2-4ac$

- لندرس اتجاه تغير الدالة f باستعمال إشارة المشتقة

لنا: $f'(x)=2ax+b$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

لدراسة إشارة $f'(x)$ نميز بين الحالتين: $a>0$ و $a<0$ (لأن $f'(x)$ كثير حدود من الدرجة الأولى ومنطبق نتيجة النشاط 2)

- في الحالة $a>0$:

إشارة $f'(x)$ حسب قيم x تلخص حسب الجدول التالي:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	-	0	+

وعليه في الحالة $a>0$: تكون الدالة f متناقصة تماما على المجال $\left]-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$ ومتزايدة تماما على المجال $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right[$

- في الحالة $a<0$:

إشارة $f'(x)$ حسب قيم x تلخص حسب الجدول التالي:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	+	0	-

وعليه في الحالة $a<0$: تكون الدالة متزايدة تماما على المجال $\left]-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$ ومتناقصة تماما على المجال $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right[$

- في جميع الحالات $f\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{\Delta}{4a}$ (بتعويض x بالعدد $-\frac{b}{2a}$ في الشكل النموذجي)

مبرهنة:

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

جدول تغيرات الدالة $x \to ax^2+bx+c$ أين a ، b ، c أعداد حقيقية مفروضة بحيث $a \neq 0$ يكون حسب ما يلي:

- في الحالة $a > 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
ax^2+bx+c	$\searrow$	$\frac{-\Delta}{4a}$	$\nearrow$

الدالة $x \to ax^2+bx+c$ تقبل قيمة حدية صغرى عند $-\frac{b}{2a}$

- في الحالة $a < 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
ax^2+bx+c	$\nearrow$	$\frac{-\Delta}{4a}$	$\searrow$

الدالة $x \to ax^2+bx+c$ تقبل قيمة حدية عظمى عند $-\frac{b}{2a}$

حيث Δ مميز كثير الحدود ax^2+bx+c $\left(\Delta = b^2-4ac\right)$

ليكن (P) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم $(0,I,J)$.

- في الحالة $a > 0$: النقطة S حيث : $S\left(-\frac{b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right)$ تقع "تحت" جميع نقط P.

- في الحالة $a < 0$: النقطة S حيث: $S\left(-\frac{b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right)$ تقع "فوق" جميع نقط P

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

وإشارة $\frac{-\Delta}{4a}$ متعلقة بإشارة Δ وإشارة a ويكون تلخيص جميع الحالات كما يلي :

مبرهنة :

شكل (P) المنحني الممثل للدالة $x \mapsto ax^2+bx+c$ حيث a ، b ، c أعداد حقيقية مفروضة بحيث $a \neq 0$ بالنسبة إلى معلم $(0,I,J)$ ، وعدد نقط تقاطعه مع حامل محور الفواصل حسب إشارتي a و Δ $(\Delta = b^2-4ac)$ يلخص ما يلي :

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

تعريف، فرضية:

(P) المنحني الممثل للدالة $x \to ax^2+bx+c$ حيث a، b، c أعداد حقيقية مفروضة بحيث $a \neq 0$ بالنسبة إلى معلم $(0,I,J)$، يسمى قطعا مكافئا والمستقيم ذو المعادلة $x=-\frac{b}{2a}$ هو محور تناظر للقطع المكافئ (P) والنقطة S نقطة تقاطع (P) مع محور تناظره تسمى ذروة القطع المكافئ (P)

4/ المعاملات من الدرجة الثانية، تحليل كثير حدود من الدرجة الثانية:

لتكن a، b، c أعداد حقيقية مفروضة بحيث $a \neq 0$ وليكن $f(x)$ كثير الحدود للمتغير الحقيقي x وليكن Δ مميز كثير الحدود $f(x)$ $(\Delta = b^2-4ac)$

لدينا: $ax^2+bx+c=0$.....(1)، حيث x هو المجهول في R، تكافئ المعادلة $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$ (لأن $a \neq 0$)

- في الحالة $\Delta < 0$:

يكون $-\frac{\Delta}{4a^2}>0$ منه: $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}>0$ وعليه لا يوجد أي حل للمعادلة (1)

جميع الحقوق محفوظة ©

- في الحالة $\Delta = 0$:

المعادلة (1) تكافئ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ وهذا يكافئ $x+\frac{b}{2a}=0$ وعليه المعادلة (1) تقبل حلا وحيدا وهو $-\frac{b}{2a}$ (وهذا الحل يسمى حلا مضاعفا)

و $f(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$.

- في الحالة $\Delta > 0$:

يكون $\Delta = \left(\sqrt{\Delta}\right)^2$ منه $\frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$

والمعادلة (1) تكافئ: $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right)^2 = 0$ وهذا يكافئ

$\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right)\right]\times\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]=0$ وهذا يكافئ:

$x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=0$ أو $x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=0$

منه المعادلة (1) تقبل حلين متمايزين وهما: $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

وبما أن العبارة المشار إليها بالإشارة (*) هي نفسها العبارة المشار إليها بالإشارة (**) يكون

$$f(x) = a\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

وهكذا لقد برهنا على:

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

مبرهنة:

لتكن a ، b ، c أعداد حقيقية مفروضة بحيث $a \neq 0$ وليكن $f(x)$ كثير الحدود للمتغير الحقيقي x حيث: $f(x) = ax^2 + bx + c$ ولتكن المعادلة: $ax^2 + bx + c = 0$.....(1) حيث x هو المجهول في R ، وليكن Δ مميز كثير الحدود $f(x)$ لدينا $\Delta = b^2 - 4ac$ (Δ يسمى كذلك مميز المعادلة (1))

	الحالة $\Delta > 0$	الحالة $\Delta = 0$	
لكي نحل في R ، المعادلة (1):	المعادلة (1) لها، في R ، حلان متمايزان x' و x'' هما: $x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	المعادلة (1) لها، في R ، حل وحيد (وهو حل مضاعف) وهذا الحل هو $x_0 = -\frac{b}{2a}$	المعادلة (1) ليس لها أي حل في المجموعة R
تحليل كثير الحدود $f(x)$	$f(x) = a(x-x')(x-x'')$	$f(x) = a(x-x_0)$	لا يمكن تحللي $f(x)$ إلى جداء كثيري حدود من الدرجة الأولى

تعريف:

لتكن a ، b ، c أعداد حقيقية مفروضة

نسمي جذرا لكثير الحدود $ax^2 + bx + c$ للمتغير الحقيقي x كل حل للمعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ حيث x هو المجهول في R

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

أمثلة:

• على المعادلات:

المعادلة (حيث x هو المجهول في R)	$6x^2-13x-5=0$	$5x^2+7x+3=0$	$25x^2-30x-9=0$
Δ مميز المعادلة	$\Delta=(-13)^2-4(6)(-5)$ $\Delta=189$	$\Delta=7^2-4(5)(3)$ $\Delta=-11$	$=(-30)^2-4(-25)(-9)$ $\Delta=0$
إشارة Δ	$\Delta>0$	$\Delta<0$	$\Delta=0$
حلول المعادلة	$x'=\dfrac{-(-13)-\sqrt{189}}{2.6}$ $x''=\dfrac{-(-13)+\sqrt{189}}{2.6}$ أي: $x'=-\dfrac{1}{3}$ و $x''=\dfrac{5}{2}$ (حلان متمايزان)	المعادلة لا تقبل أي حل في المجموعة R	$x_0=\dfrac{-(-30)}{2(-25)}$ $x_0=-\dfrac{3}{5}$ (حل واحد مضاعف)

• على التحليل:

كثير الحدود $f(x)$	$f(x)=6x^2-13x-5$	$f(x)=5x^2+7x+3$	$-25x^2-30x-9$
Δ مميز المعادلة	$\Delta=189$ منه $\Delta>0$	$\Delta=-11$ منه $\Delta<0$	$\Delta=0$ منه $\Delta=0$
جذور $f(x)$	$x'=-\dfrac{1}{3}$ و $x''=\dfrac{5}{2}$	ليس لكثير الحدود $f(x)$ أي جذر في R	$x_0=-\dfrac{3}{5}$ (حل واحد مضاعف)
تحليل $f(x)$	$-\left(-\dfrac{1}{3}\right)\left(x-\dfrac{5}{2}\right)$ $=(3x+1)(2x-5)$	لا يمكن تحليل $f(x)$ إلى جداء كثيري حدود من الدرجة الأولى	$f(x)=-25\left(x-\left(\dfrac{3}{5}\right)\right)^2$ $f(x)=-(5x+3)^2$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

ملاحظة هامة:

المبرهنة السابقة تعطي طريقة العامة للحل، جبريا، لمعادلة من الدرجة الثانية أو لتحليل كثير حدود من الدرجة الثانية وهذه الطريقة تعتمد على مفهوم المميز

هناك حالات خاصة فيها يمكن الاستغناء على مفهوم المميز.

مثلا:

$3x^2+3x=3x(x+1)$ وحلا المعادلة $3x^2+3x=0$ هما (-1) و0

$4x^2-1=(2x-1)(2x+1)$ وحلا المعادلة $4x^2-1=0$ هما $\left(-\frac{1}{2}\right)$ و $\left(\frac{1}{2}\right)$

ولكن في كلتى الحالتين كان بإمكاننا استعمال المميز لأن:

$3x^2+3x$ من الشكل: ax^2+bx+c مع $a=3,b=3,c=0$

$4x^2-1$ من الشكل: ax^2+bx+c مع

$a=4,b=0,c=-1$

5/ إشارة كثير حدود من الدرجة الثانية:

لتكن a، b، c أعداد حقيقية مفروضة بحيث $a\neq 0$ وليكن $f(x)$ كثير الحدود للمتغير الحقيقي x حيث: $f(x)=ax^2+bx+c$ وليكن Δ مميز $f(x)$

لنا: $f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$

- الحالة $\Delta<0$:

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

مهما تكون قيمة x في R : $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}>0$ منه إشارة $f(x)$ هي إشارة a (حسب قواعد إشارة جداء)

- في الحالة $\Delta=0$:

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

من أجل $x\neq-\frac{b}{2a}$ يكون إشارة $f(x)$ هي إشارة a

- في الحالة $\Delta>0$:

$f(x)$ له جذران حقيقيان متمايزان x' و x'' (هنا نسمي x' أصغر الحلين) و $f(x)=a(x-x')(x-x'')$ والإشارات تلخص في الجدول التالي:

x		$+\infty$		x'		x''		$+\infty$
حسب إشارة كثير حدود من الدرجة الأولى	إشارة $x-x'$	-	0	+	0	+		
	إشارة $x-x''$	-		-		+		
حسب القواعد حول إشارة جداء	إشارة $(x-x')(x-x'')$	+	0	-	0	+		
	إشارة $a(x-x')(x-x'')$	إشارة a	0	عكس إشارة a	0	إشارة a		

وهكذا لقد برهنا على

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

تعريف:

لتكن a، b، c أعداد حقيقية مفروضة بحيث $a \neq 0$ وليكن $f(x)$ كثير الحدود للمتغير الحقيقي x حيث: $f(x) = ax^2 + bx + c$ وليكن Δ مميز $f(x)$ $\left(\Delta = b^2 - 4ac\right)$

إشارة $f(x)$ حسب قيم x، تكون حسب ما يلي:

في الحالة $\Delta < 0$:

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
إشارة $f(x)$	إشارة a

في الحالة $\Delta = 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
إشارة $f(x)$	إشارة a	0	إشارة a

في الحالة $\Delta > 0$

x	$+\infty$	x'		x''	$+\infty$
إشارة $f(x)$	إشارة a	0	عكس إشارة a	0	إشارة a

x' و x'' جذرا $f(x)$ مع $x'' > x'$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

مثلا:

ليكن $f(x)$ و $g(x)$ كثيري الحدود للمتغير الحقيقي x حيث:

$f(x) = -3x^2 + 5x - 2$ و $g(x) = 5x^2 + 6x + 1$

Δ مميز $f(x)$ هو بحيث: $\Delta = 5^2 - 4(-3)(-2)$

$\Delta = 1$

جذرا $f(x)$ هما: $x' = \frac{-5-\sqrt{1}}{2(-3)}$ و $x'' = \frac{-5+\sqrt{1}}{2(-3)}$

$x' = 1$ و $x'' = \frac{2}{3}$

و $0 > -3$

منه إشارة $f(x)$ حسب قيم x، تلخص في الجدول:

من هذا الجدول نستنتج، مثلا، أن مجموعة حلول المتراجحة $0 \geq -3x^2 + 5x - 2$، حيث x هو المجهول في R، هي $\left]-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup [1, +\infty[$

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
إشارة $f(x)$		-	0	+	0	-	

Δ مميز $g(x)$ هو بحيث: $\Delta = 6^2 - 4(5)(1)$

$\Delta = 16$

جذرا $f(x)$ هما: $x' = \frac{-6-\sqrt{16}}{2.5}$ و $x'' = \frac{-6+\sqrt{16}}{2.5}$

$x' = -1$ و $x'' = -\frac{1}{5}$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

و $5 > 0$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{5}$		$+\infty$
إشارة $g(x)$		+	0	-	0	+	

منه إشارة $g(x)$، حسب قيم x، تلخص في الجدول من هذا الجدول، نستنتج –مثلا- أن مجموعة حلول المتراجحة $5x^2+6x+1 \leq 0$، حيث x هو الجهول في R، هي $\left]-1,-\frac{1}{5}\right[$

¶ ملاحظة هامة جدا:

1) لكي نحل في R، متراجحة من الدرجة الثانية، ندرس إشارة كثير حدود من الدرجة الثانية ثم نستنتج مجموعة حلول المتراجحة.

2) النتائج النظرية حول إشارة كثير الحدود ax^2+bx+c الواردة في المبرهنة الفارطة هي قراءة للنتائج البيانية الواردة في المبرهنة حول شكل المنحني الممثل للدالة $x \to ax^2+bx+c$ ووضعه بالنسبة إلى حامل محور الفواصل الواردة في الفقرة (3) السابقة.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

حساب مميز كثير حدود، أو معادلة، من الدرجة الثانية:

التمرين 1:

أحسب المميز لكل واحد من كثيرات الحدود، للمتغير الحقيقي x

$f(x)=3x^2+7x+5$ ، $g(x)=\frac{1}{2}x^2+x-1$ ، $h(x)=-x^2+\sqrt{3}x+\frac{1}{2}$ ،

$k(x)=3\sqrt{2}x^2+\sqrt{8}$ ، $\ell(x)=-\frac{3}{5}x^2+x\sqrt{3}$ ،

$u(x)=(1-2x)^2+3+5x$ ، $\vartheta(x)=7-3x^2+(1-3x)+(2x+1)$

التمرين 2:

أحسب المميز لكل واحدة من المعادلات ذات المجهول x ، التالية:

$x^2+3x+5=0$ .....(1) ، $-3x^2+x+\frac{1}{2}=0$ .....(2) ،

$\frac{1}{4}x^2+3=x^2+x\sqrt{5}+1$ .....(3) ، $x^2=3$ .....(4)

الشكل النموذجي لكثير حدود من الدرجة الثانية:

التمرين 3:

أكتب على الشكل النموذجي كل واحد من كثيرات الحدود للمتغير الحقيقي x التالية:

$f(x)=-2x^2+x+1$ ، $g(x)=\frac{1}{4}x^2+3x+12$ ،

$h(x)=5x^2-2x\sqrt{15}+3$ ، $k(x)=x^2-(5+3x)-(2x+1)^2-3x+\frac{1}{2}$

جدول تغيرات دالة كثير حدود من الدرجة الثانية وتمثيلها البياني:

جميع الحقوق محفوظة ©

التمرين 4:

باستعمال المبرهنة حول جدول تغيرات دالة كثير حدود من الدرجة الثانية، أنشئ جدول تغيرات كل واحدة من الدوال ℓ, k, h, g, f المعرفة على R بما يلي:

$f(x) = x^2 + 2x + 7$ ، $g(x) = -2x^2 - 3x + \frac{1}{2}$ ،

$h(x) = 3x^2 + 5$ ، $k(x) = -3x^2 + x\sqrt{2}$ ،

$\ell(x) = -7x + x^2 - (1 - x\sqrt{2})^2 - 3 + 5x$

التمرين 5:

c, b, a أعداد حقيقية مفروضة بحيث: $a \neq 0$

لتكن f الدالة المعرفة على R بالدستور: $f(x) = ax^2 + bx + c$ وليكن (P) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد $(0, I, J)$

وليكن Δ مميز كثير الحدود $f(x)$

بالاعتماد على الشكل وعلى الشكل فقط

- عين إشارة كل واحد من العددين a و Δ
- عين مجموعة حلول المعادلة $f(x) = 0$ ، حيث x هو المجهول في R
- أنشئ جدولا تلخص فيه إشارة $f(x)$ ، حسب قيم x

في كل حالة من الحالات (1)، (2)، (3)، (4)، (5)، (6) الأشكال التالية:

(1 $f(x) = x^2 - 3x + 2$ (2) ، $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ ،

(3) $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$ ، (4) $f(x) = -x^2 - 2x - 1$ ،

(5) $f(x) = x^2 + 4x + 5$ ، (6) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{11}{2}$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

التمرين 6 :

1) u مقدار قيمته تتعلق بقيمة المتغير الحقيقي t وفق الدستور:

$$u = -t^2 + 4t + 7$$

ما هي أكبر قيمة يأخذها المقدار u عندما t يتغير في R ؟

2) ϑ مقدار قيمته تتعلق بقيمة المتغير الحقيقي m وفق الدستور:

$$\vartheta = m^2 - 6m + 21$$

ما هي أصغر قيمة يأخذها المقدار ϑ عندما m يتغير في R ؟

معادلات ومتراجحات :

التمرين 7:

بدون استعمال المميز، -حل في R - كل واحدة من المعادلات ذات المجهول x التالية:

$6x^2 + 9x = 0$ .....(1)، $3x^2 = \frac{1}{2}x$ .....(2)، $5x^2 = 1$ .....(3)،

$\frac{1}{4}x^2 + \sqrt{2} = 1$ .....(4)، $x^2 + \frac{1}{4} = 2x - \frac{3}{4}$ .....(5)

التمرين 8:

باستعمال المميز، حل في R - كل واحدة من المعادلات ذات المجهول x التالية:

$3x^2 + 7x - 10 = 0$ .....(1)، $5x^2 - 8x + 1 = 0$ .....(2)،

$5x^2 - 6x + 11 = 0$ .....(3)، $12x^2 - 12x + 3 = 0$ .....(4)،

$-x^2 - 8x - 11 = 0$ .....(5)، $12x^2 + 13x + 3 = 0$ .....(6)

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

التمرين 9:

حل R - كل واحدة من المعادلات والمتراجحات ذات المجهول x التالية:

$x^3-9x^2+14x=0$ .....(1)، $(3x+1)(x^2+5x+1)=0$ .....(2)،

$(1-5x)(-8x^2+6x-1)=0$ .....(3)، $(3x^2+x-1)(x^2-4)=0$ .....(4)،

$(5x^2-17x+10)(4x^2+12x+9)=0$ .....(5)،

$(3x+8)(x^2+x+5)=0$ .....(6)،

$(4x^2+12x+9)(x^2+x+7)=0$ .....(7)، $3x^2-5x+2>0$ .....(8)،

$-5x^2+8x+4\le 0$ .....(9)، $9x^2+30x+25>0$ .....(10)،

$x^2-8x+7\le 0$ .....(11)، $-3x^2+5x+1>0$ .....(12)،

$4x^2<25$ .....(13)، $5x^2<2x$ .....(14)،

$(x^2-2x+3)(x^2+x+7)<0$ .....(15)، $2x(x^2+2x)<0$ .....(16)،

$(2x-x^2)(x^2+3x-4)\ge 0$ .....(17)،

$(x^2+2x-3)^2<-3(x^2+2x-3)$ .....(18)،

$\dfrac{-3x^2+2x+8}{x^2-9}>0$ .....(19)، $\dfrac{x(-5x^2+x+1)}{2x+3}\le 0$ .....(20)

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

تحليل كثير حدود من الدرجة الثانية:

التمرين 10:

قل إن كان كثير الحدود $f(x)$ ، للمتغير الحقيقي x ، قابلا أن يحلل إلى جداء كثيري حدود من الدرجة الأولى وفي حالة الإجابة بنعم (مع التبرير)، حلل $f(x)$ في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x) = -5x^2 + 8x + 9$ ، 2) $f(x) = 7x^2 + x + 3$ ،

3) $f(x) = 4x^2 - 28x + 49$

مسائل:

التمرين 11:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(0, I, J)$

1) أنشئ القطع المكافئ (P) الممثل للدالة f المعرفة بالدستور: $f(x) = x^2 - 4x$ والمستقيم (d) ذو المعادلة $y = -x - 2$

2) ل بيانيا:

أ. المعادلة $x^2 - 4x = -x - 2$.....(1) حيث x هو المجهول في R

ب. المتراجحة $x^2 - 4x < -x - 2$.....(2) حيث x هو المجهول في R

3) استعمال مفهوم المميز –حل في R - المعادلة (1) والمتراجحة (2) المعتبران في السؤال السابق

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

التمرين 12:

1) عين عددين حقيقيين مجموعهما 21 وجدائهما (-35)

2) ن بعدي مستطيل علما أن محيط هذا المستطيل هو $9,10cm$ ومساحته $4,125cm^2$

التمرين 13:

بين سنتي 1990 و1992 إزداد سعر بضاعة بنسبة قدرها $x\%$ وبين سنتي 1992 و1994 إزداد سعر هذه البضاعة بنسبة قدرها $(x+2)\%$

عين x علما أن بين السنتين 1990 و1994 إزداد سعر هذه البضاعة بنسبة قدرها $23,2\%$

التمرين 14:

السيد هشام حرافي يصنع حقائب ومقلمات بطريقة تقليدية وهو يعلم أن S عدد الحقائب و T عدد المقلمات التي يصنعها في اليوم الواحد مرتبطان بالعلاقة $S^2+25+4T=80$

1) هو أكبر عدد ممكن من المقلمات التي يمكن للسيد هشام أن يصنعها في يوم واحد؟

2) ا هو أكبر عدد ممكن من الحقائب التي يمكن للسيد هشام أن يصنعها في يوم واحد؟

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

التمرين 15:

1) عين ثلاثة حدود متتابعة من متتالية حسابية علما أن مجموع هذه الحدود يساوي 27 وجدائها يساوي (567-)

2) ن ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية علما أن الحد الثاني من هذه الحدود هو 6 ومجموع هذه الحدود يساوي 19.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

التمرين 1:

حساب مميز كثير حدود، أو معادلة، من الدرجة الثانية:

نرمز بـ Δ لمميز كثير الحدود $f(x)$ في كل ما يلي:

- $f(x)=3x^2+7x+5$

❖ **وقفة:**

(لحساب المميز، نبدأ أولا بالتأكد أن $f(x)$ مكتوب على الشكل $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث a ثابت من R^* و c,b ثابتان من R إذ المميز يرتبط بهذا الشكل)

لدينا: $\Delta=7^2-4(3)(5)$
$=-11$

- $g(x)=\frac{1}{2}x^2+x-1$

لدينا: $\Delta=(\sqrt{3})^2-4(-1)(\frac{1}{2})$
$=1$

- $h(x)=-x^2+\sqrt{3}x+\frac{1}{2}$

لدينا: $\Delta=0^2-4(3\sqrt{2})(\sqrt{8})$
$=-48$

- $k(x)=3\sqrt{2}x^2+\sqrt{8}$

لدينا: $\Delta=(\sqrt{3})^2-4\left(-\frac{3}{5}\right)(0)$
$=3$

- $\ell(x)=-\frac{3}{5}x^2+x\sqrt{3}$

جميع الحقوق محفوظة ©

$$u(x) = (1-2x)^2 + 3 + 5x$$

نبدأ بكتابة $f(x)$ كتابة ملائمة

لدينا: $u(x) = 1 - 4x + 4x^2 + 3 + 5x$

$$= 4x^2 + x + 4$$

$$\Delta = (1)^2 - 4(4)(4)$$

ومنه: $= 1 - 64$

$$= -63$$

التمرين 2:

❖ **وقفة:**

(لحساب مميز معادلة من الدرجة الثانية نبدأ بالتأكد أنها مكتوبة على الشكل $ax^2 + bx + c = 0$ حيث a ثابت من R^* و c,b ثابتان من R)

نتبع نفس المنهجية الموضحة في "التمرين 1"

الشكل النموذجي لكثير حدود من الدرجة الثانية:

التمرين 3:

كتابة الشكل النموذجي لكل واحد من كثيرات الحدود للمتغير الحقيقي x

$$f(x) = -2x^2 + x \quad (1)$$

ليكن x عنصرا من R، عندئذ:

جميع الحقوق محفوظة ©

$$f(x) = -2(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2})$$

$$= -2\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - \frac{1}{2}\right]$$

$$= -2\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right]$$

$$g(x) = \frac{1}{4}x^2 + 3x + \langle 2 \rangle$$

ليكن x عنصرا من R، عندئذ:

$$g(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 12x + 48)$$

$$= \frac{1}{4}\left[(x+6)^2 - 36 + 48\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[(x+6)^2 + 12\right]$$

$$h(x) = 5x^2 - 2x\sqrt{15} \langle 3 \rangle$$

ليكن x عنصرا من R، عندئذ:

جميع الحقوق محفوظة ©

$$h(x) = x^2 - 5 + 3x - (4x^2 + 4x + 1) - 3x + \frac{1}{2}$$

$$= -3x^2 - 4x - \frac{11}{2}$$

$$= -3\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{11}{6}\right)$$

$$= -3\left[\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} + \frac{11}{6}\right]$$

$$= -3\left[\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{8}{18} + \frac{33}{18}\right]$$

$$= -3\left[\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{25}{18}\right]$$

جدول تغيرات دالة كثير حدود من الدرجة الثانية وتمثيلها البياني:

التمرين 4:

إنشاء جدول تغيرات كل واحدة من الدوال باستعمال المبرهنة

$$f(x) = x^2 + 2x + 1$$

لدينا: $a = 1$ أي أن: $a > 0$ ولدينا: $b = 2$ ولدينا: $\Delta = -24$

ومنه جدول تغيرات الدالة f يتمثل في التالي:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	6	$\nearrow$	

حيث: $-1 = \frac{-b}{2a}$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

و $6 = \frac{-\Delta}{4a}$

$g(x) = -2x^2 - 3x + \frac{1}{2}$

لدينا: $a = -2$ أي أن: $a < 0$

ولدينا: $b = -3$

ولدينا: $\Delta = 13$

ومنه جدول تغيرات الدالة g يتمثل في التالي:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		$+\infty$
$g(x)$		$\nearrow$	$\frac{13}{8}$	$\searrow$	

بحيث:

$-\frac{3}{4} = -\frac{b}{2a}$

و $\frac{13}{8} = \frac{-\Delta}{4a}$

التمرين 5:

c, b, a أعداد حقيقية مفروضة بحيث: $a \neq 0$

f الدالة المعرفة على R بالدستور: $f(x) = ax^2 + bx + c$

(P) المنحني الممثل للدالة f في المحتوى المنسوب إلى معلم متعامد $(0, I, J)$ وليكن Δ مميز كثير الحدود $f(x)$

1) اعتماد على الشكل، لنعين إشارة كل من العددين:

الدراسة تعود بالضبط إلى المبرهنة المتعلقة بالشكل والموضحة في الدرس

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

2) عين مجموعة حلول المعادلة $f(x)=0$ حيث x هو المجهول في R، بالاعتماد على الشكل

نميز الحالات التالية:

- لما $a<0$:

- في حالة $\Delta<0$ مجموعة الحلول من المجموعة الخالية
- في حالة $\Delta=0$ مجموعة الحلول هي: $\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$
- في الحالة $\Delta>0$ مجموعة الحلول هي: $\left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a},\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

- لما $a>0$:

تبقى نفس الحالات الثلاث السابقة

3) إنشاء جدول لتخليص إشارة $f(x)$ حيث قيم x

- في حالة $a<0$ و $\Delta<0$ نجد: $f(x)<0$ من أجل كل x من R
- في حالة $a>0$ و $\Delta<0$ نجد: $f(x)<0$ من أجل كل x من R
- في حالة $a>0$ و $\Delta=0$ لدينا:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
إشارة $f(x)$		+	0	+	

- في حالة $a<0$ و $\Delta=0$ لدينا:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
إشارة $f(x)$		+	0	-	

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

- في حالة $a > 0$ و $\Delta > 0$، نفرض أن: x_1 و x_2 هما حلا المعادلة $f(x) = 0$ حيث: $x_1 < x_2$ عندئذ:

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
إشارة $f(x)$		+	0	-	0	+	

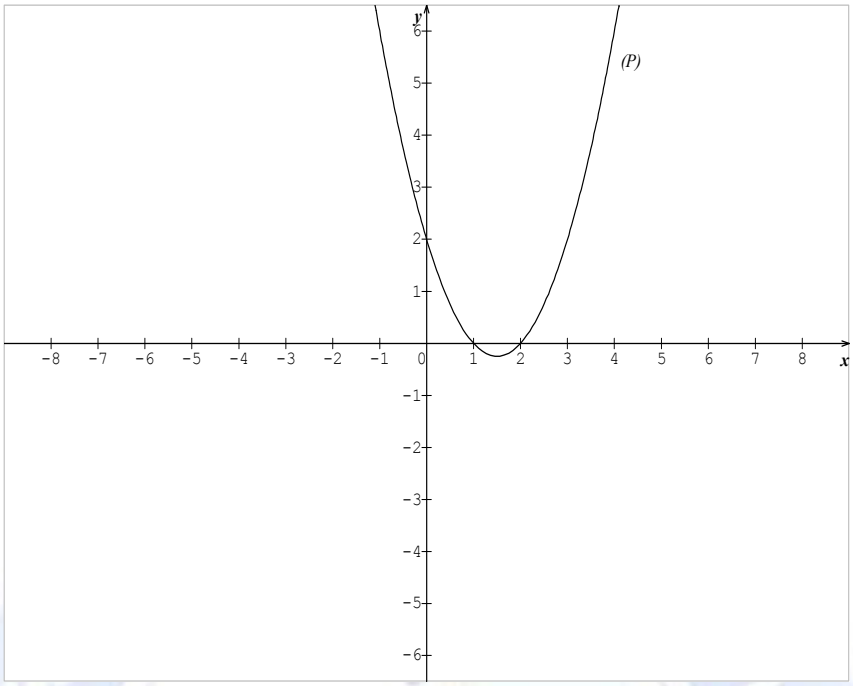
- في حالة $a < 0$ و $\Delta > 0$ نفرض أن x_1 و x_2 هما حلا المعادلة $f(x) = 0$ حيث $x_1 < x_2$ عندئذ:

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
إشارة $f(x)$		-	0	+	0	-	

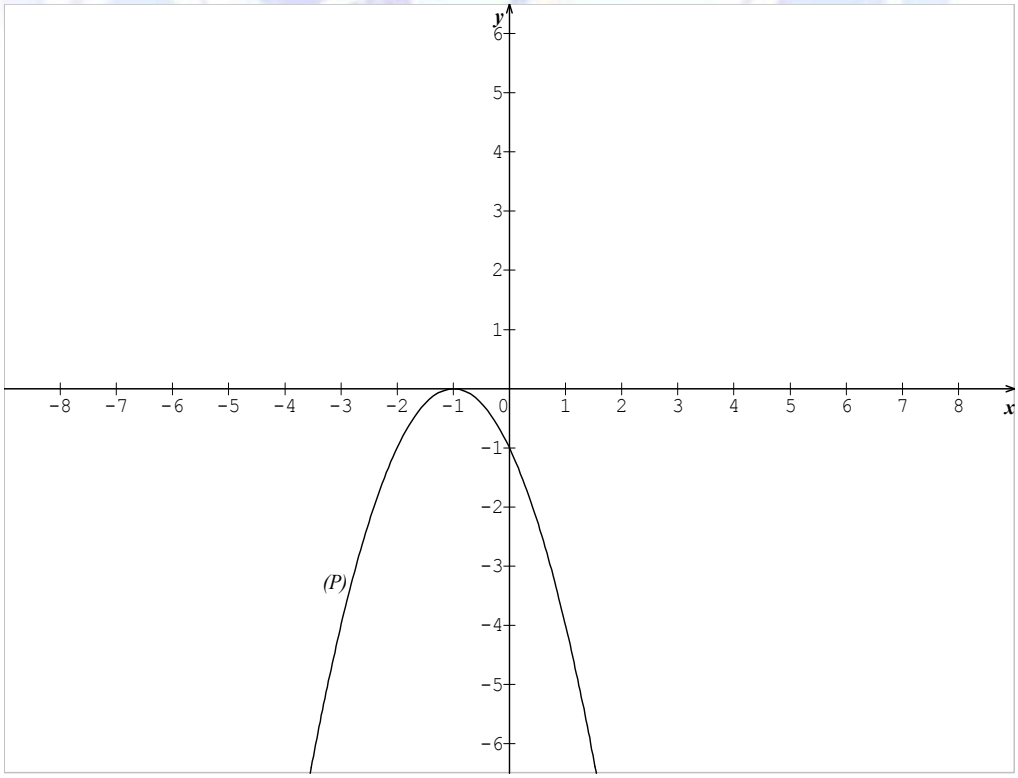
3) م (P) في حالة $f(x) = x^2 - 3x + 2$

نحاول الاستفادة من العناصر السابقة

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©



- رسم (P) في حالة: $f(x) = -x^2 - 2x - 1$



http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

التمرين 6:

1) إيجاد أكبر قيمة يأخذها المقدار u عندما t يتغير في R

لدينا u مقدار قيمته تتعلق بقيمة المتغير الحقيقي t وفق الدستور:

$$u = -t^2 + 4t + 7$$

لتكن f الدالة المعرفة على R بالدستور: $f(t) = -t^2 + 4x$

عندئذ: f' معرفة بالدستور: $f'(t) = -2t + 4$

لنلخص إشارة $f'(t)$ حسب قيم t في الجدول التالي:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
إشارة $f'(t)$		+	0	-	

وعليه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty,2]$

والدالة f متزايدة تماما على المجال $[2,+\infty[$

وعليه أكبر قيمة لـ $f(t)$ تكون من أجل $t = 2$، فنجد عندئذ:

$$f(2) = 11$$

وبالتالي: أكبر قيمة يأخذها المقدار u عندما t يتغير في R هي 11

2) نفس الكيفية يكون التعامل مع المقدار ϑ

معادلات ومتراجحات

التمرين 7:

ايجاد حلول كل من المعادلات التالية دون استعمال المميز وهذا في R

1) $6x^2 + 9x = 0 \quad .....(1)$

المعادلة (1) تكافئ $3x(2x+3) = 0$

وهذا يكافئ: $(2x+3=0)$ أو $(3x=0)$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

وهذا يكافئ: $\left(x=-\frac{3}{2}\right)$ أو $(x=0)$

$\langle 2 \rangle$ $3x^2=\frac{1}{2}$.....(2)

المعادلة (2) تكافئ $6x^2-x=0$

وهذا يكافئ: $x(6x-1)=0$

وهذا يكافئ: $(6x-1=0)$ أو $(x=0)$

وهذا يكافئ: $\left(x=\frac{1}{6}\right)$ أو $(x=0)$

$\langle 3 \rangle$ $5x^2=$.....(3)

المعادلة (3) تكافئ $x^2=\frac{1}{5}$

وهذا يكافئ: $\left(x=\sqrt{\frac{1}{5}}\right)$ أو $\left(x=-\sqrt{\frac{1}{5}}\right)$

$\langle 4 \rangle$ $\frac{1}{4}x^2+\sqrt{2}=$.....(4)

المعادلة (4) تكافئ $\frac{1}{4}x^2=1-\sqrt{2}$

وكذا: $1-\sqrt{2}<0$

ومنه لا توجد قيم لـ x من R تحقق $\frac{1}{4}x^2=1-\sqrt{2}$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (4) هي مجموعة خالية.

$\langle 5 \rangle$ $x^2+\frac{1}{4}=2x-\frac{3}{4}$.....(5)

المعادلة (5) تكافئ: $x^2-2x+1=0$

وهذا يكافئ: $(x-1)^2=0$

وهذا يكافئ: $x-1=0$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

وهذا يكافئ: $x = 1$

التمرين 8:

ايجاد حلول كل معادلة من المعادلات التالية باستخدام المميز

$\langle 1 \rangle = 3x^2 + 7x - 10 \quad .....(1)$

لدينا: $\Delta = 7^2 - 4(3)(-10)$
$= 169$

وبما أن $\Delta > 0$ فإن المعادلة (1) لما حلين متمايزين لنسميهما x_1 و x_2

حيث: $x_1 = \dfrac{-7+\sqrt{169}}{2(3)}$ و $x_1 = \dfrac{-7-\sqrt{169}}{2(3)}$

أي: $x_1 = \dfrac{-7+13}{6}$ و $x_2 = \dfrac{-7-13}{6}$

أي: $x_1 = 1$ و $x_2 = -\dfrac{10}{3}$

$\langle 2 \rangle = 5x^2 - 8x + 1 \quad .....(2)$

لدينا: $\Delta = (-6)^2 - 4(5)(11)$
$= -184$

وبما أن $\Delta < 0$ فإن المعادلة (3) لا تقبل حلولا في R

التمرين 9:

ايجاد حلول كل معادلة ومتراجحة من المعادلات والمتراجحات المعطاة حيث x هو المجهول في R

❖ **وقفة:**

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

(إذا كنا مع معادلة درجتها أكبر تماما من 2 فلنفكر في ربطها بمعادلة من الدرجة الثانية أو الأولى كالاستفادة من العامل المشترك مثلا)

$\langle 1 \rangle$ $x^3 - 9x^2 + 14x = \ldots\ldots(1)$

المعادلة (1) تكافئ: $x(x^2 - 9x + 14)$

وهذا يكافئ: $(x = 0)$ أو $x(x^2 - 9x + 14 = 0)\ldots\ldots(1)'$

ليكن Δ مميز المعادلة $(1)'$ عندئذ:

$$\begin{aligned}\Delta &= (-9)^2 - 4(1)(14)\\ &= 91 - 56\\ &= 25\end{aligned}$$

وبما أن $\Delta > 0$ فإن المعادلة $(1)'$ تقبل حلين متمايزين نسبتهما x_1 و x_2

حيث: $x_1 = \dfrac{9+\sqrt{25}}{2}$ و $x_2 = \dfrac{9-\sqrt{25}}{2}$

أي أن: $x_1 = 7$ و $x_2 = 2$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (1) هي: $\{0,2,7\}$

$\langle 4 \rangle$ $(x^2 - 4)(3x^2 + x - 1) = \ldots\ldots(4)$

المعادلة (4) تكافئ: $(x^2 - 4 = 0)$ أو $(3x^2 + x - 1 = 0)$

وهذا يكافئ: $(x^2 = 0)$ أو $(3x^2 + x - 1 = 0)$

وهذا يكافئ: $(x = 2)$ أو $(x = -2)$ أو $(3x^2 + x - 1 = 0)$ $\ldots\ldots\ldots(4)'$

ليكن Δ مميز المعادلة $(4)'$ عندئذ:

$$\begin{aligned}\Delta &= 1^2 - 4(3)(-1)\\ &= 1 + 12\\ &= 13\end{aligned}$$

وبما أن $\Delta > 0$ فإن المعادلة $(4)'$ تقبل حلين متمايزين نسبتهما x_1 و x_2

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

حيث: $x_1 = \frac{-1+\sqrt{13}}{6}$ و $x_2 = \frac{-1-\sqrt{13}}{6}$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (4) هي: $\left\{\frac{-1-\sqrt{13}}{6}, \frac{-1+\sqrt{13}}{6}, 2, -2\right\}$

$\langle 5 \rangle$ $(4x^2+12x+9)(5x^2-17x+10)=0$ .....(5)

المعادلة (5) تكافئ $4x^2+12x+9=0$ .....(5)' أو

$5x^2-17+10=0$ .....(5)''

المعادلة (5) تكافئ $4x^2+12x+9=0$ .....(5)' أو

$5x^2-17+10=0$ .....(5)''

ليكن Δ_1 مميز المعادلة (5)' عندئذ:

$$\Delta_1 = (12)^2 - 4(9)$$
$$= 0$$

وبما أن $\Delta_1 = 0$ فإن المعادلة (5)' تقبل حلا مضاعفا نسميه x_0

حيث:
$$x_0 = \frac{-12}{2(4)}$$
$$= -\frac{3}{2}$$

وليكن Δ_2 مميز المعادلة (5)'' عندئذ:

$$\Delta_2 = (-17)^2 - 4(5)(10)$$
$$= 289 - 200$$
$$= 89$$

وبما أن $\Delta_2 > 0$ فإن المعادلة (5)'' تقبل حلين متمايزين نسميهما x_1 و x_2

حيث: $x_1 = \frac{17+\sqrt{89}}{10}$ و $x_2 = \frac{17-\sqrt{89}}{10}$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (5) هي:

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

$$\left\{\frac{17-\sqrt{89}}{10},\frac{17+\sqrt{89}}{10},-\frac{3}{2}\right\}$$

18 $3x^2-5x+2>0$.....(8)

ليكن Δ مميز كثير الحدود: $3x^2-5x+2$ عندئذ:

$$\Delta=(-5)^2-4(3)(2)$$
$$=1$$

وبما أن $\Delta>0$ فإن لهذا كثير الحدود جذرين متمايزين نسميهما x_1 و x_2

حيث: $x_1=\frac{5+\sqrt{1}}{2(3)}$ و $x_2=\frac{5-\sqrt{1}}{2(3)}$

$x_1=1$ و $x_2=\frac{2}{3}$

نلخص إشارة كثير الحدود $(3x^2-5x+2)$ حيث قيم x من R في الجدول التالي:

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
إشارة $3x^2-5x+2$		+	0	-	0	-	

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (8) هي: $\left]-\infty,\frac{2}{3}\right[\cup\left]1,+\infty\right[$

17 $(2x-x^2)(x^2+3x-4)\geq 0$.....(17)

- لنبحث أولا عن جذور (x^2+3x-4)

ليكن Δ مميز هذا كثير الحدود عندئذ:

$$\Delta=3^2-4(1)(-4)$$
$$=25$$

وبما أن $\Delta>0$ فإن لهذا كثير الحدود جذرين متمايزين نسميهما x_1 و x_2

جميع الحقوق محفوظة ©

حيث: $x_1 = \frac{-3+\sqrt{25}}{2(1)}$ و $x_2 = \frac{-3-\sqrt{25}}{2(1)}$

$x_1 = 1$ و $x_2 = -4$

لنبحث عن جذور كثير الحدود $(2x - x^2)$

لدينا المعادلة $2x - x^2 = 0$ تكافئ $x(2-x) = 0$

وهذا يكافئ: $(x = 0)$ أو $(x = 2)$

ومنه $2x - x^2$ له جذران متمايزان هما: 0 و2

نلخص إشارة $(2x - x^2)(x^2 + 3x - 4)$ في الجدول التالي حيث قيم x من R

x	$-\infty$		-4		0		1		2		$+\infty$
إشارة $2x - x^2$		-			0		+		0	-	
إشارة $x^2 + 3x - 4$		+	0	-			0	+			
إشارة $(2x - x^2)(x^2 + 3x - 4)$		-	0	+	0	-	0	+	0	-	

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (17) هي: $[-4,0] \cup [1,2]$

$$\langle 19 \rangle \quad \frac{-3x^2 + 2x + 8}{x^2 - 9} > \quad .....(19)$$

بنفس الكيفية السابقة نجد أن جذري: $(-3x^2 + 2x + 8)$ هما: 2 و $\left(-\frac{4}{3}\right)$

ونجد أن جذرين $(x^2 - 9)$ هما: (-3) و3

- نلخص إشارة $\frac{-3x^2 + 2x + 8}{x^2 - 9}$ في الجدول التالي وهذا حسب قيم x من R

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

x	$-\infty$		-3		$-\frac{4}{3}$		2		3		$+\infty$
إشارة $-3x^2+2x+8$		-	|	-	0	+	0	-	|	-	
إشارة x^2-9		+	0	-	|	-	|	-	0	+	
إشارة $\frac{-3x^2+2x+8}{x^2-9}$		-	|	+	0	-	0	+	|	-	

ومنه مجموعة حلول المتراجحة $(19)'$ هي:

$$\left]-3,-\frac{4}{3}\right[\cup \left]2,3\right[$$

تحليل كثير حدود من الدرجة الثانية:

التمرين 10:

تحليل $f(x)$ في حالة الإمكان إلى جداء كثيري حدود من الدرجة الأولى مع التبرير

$$f(x)=-5x^2+8x+1$$

$f(x)$ يقبل جذرين متمايزين نسيهما x_1 و x_2 حيث:

$$x_1=\frac{+8-\sqrt{61}}{+10} \text{ و } x_2=\frac{+8+\sqrt{61}}{+10}$$

ومنه: $f(x)=-5(x-x_1)(x-x_2)$

$$=-5\left(x-\frac{8+\sqrt{61}}{10}\right)\left(x-\frac{8-\sqrt{61}}{10}\right)$$

$$=\left(-5x+\frac{8+\sqrt{61}}{2}\right)\left(x-\frac{8-\sqrt{61}}{10}\right)$$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

$f(x) = 7x^2 + x +$ ⟨2⟩

مميز $f(x)$ يساوي (-83) وبالتالي هو سالب تماما ولذا:

لا يمكننا تحليل $f(x)$ إلى جداء كثيري حدود من الدرجة الأولى

$f(x) = 4x^2 - 28x +$ ⟨3⟩

مميز $f(x)$ معدوم ولذا $f(x)$ يقبل جذرا مضاعف نسميه x_0 حيث:

$$x_0 = \frac{28}{2(4)} = \frac{7}{2}$$

وعليه: $f(x) = 4\left(x - \frac{7}{2}\right)\left(x - \frac{7}{2}\right)$

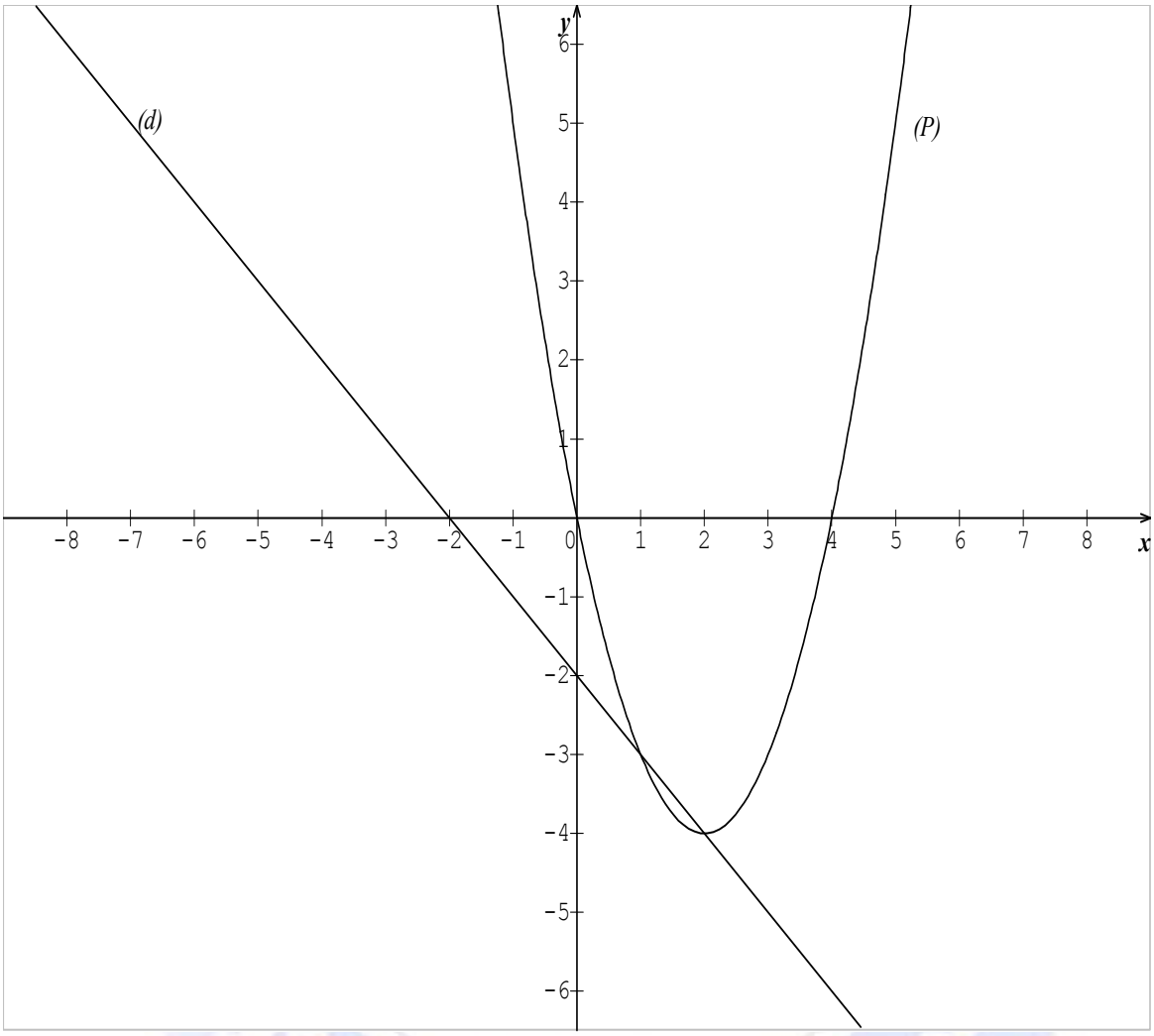
$$= (4x - 14)\left(x - \frac{7}{2}\right)$$

مسائل:

التمرين 11:

⟨1⟩ إنشاء القطع المكافئ (P) الممثل للدالة f المعرفة بالدستور: $f(x) = x^2 - 4x$ والمستقيم (d) ذو المعادلة $y = -x - 2$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©



2) أ/ الحل البياني للمعادلة $x^2-4x=-x-2$.....(1) حيث x هو المجهول في R

من الشكل حلول المعادلة (1) هي فواصل نقاط تقاطع القطع المكافئ (P) والمستقيم (d) ويبدو أن: (P) و (d) يتقاطعان في نقطتين B,A حيث:

$A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ أين: $0<x_1<x_2$

ب/ الحل البياني للمتراجحة $x^2-4x<-x-2$.....(2) حيث x هو المجهول في R

من الفرع $(f',2)$ نجد أن مجموعة حلول المتراجحة (2) هي: $]x_1x_2[$

3) حلول المعادلة (1) تكافئ: $x^2-3x+2=0$.....(1)'

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

ليكن Δ مميز المعادلة $(1)'$ عندئذ:

$$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(2)$$
$$= 1$$

وبما أن $\Delta > 0$ فإن المعادلة $(1)'$ تقبل حلين متمايزين نسميهما x'', x'

حيث: $x' = \frac{3+\sqrt{1}}{2}$ و $x'' = \frac{3-\sqrt{1}}{2}$

$x' = 2$ و $x'' = 1$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (1) هي: $\{1,2\}$

حلول المتراجحة (2) تكافئ $x^2 - 3x + 2 < 0 \ldots\ldots (2)'$

وبالاستفادة من الفرع السابق نجد أن مجموعة حلول المتراجحة (2) هي:

$]1,2[$

التمرين 12:

1) عيين عددين حقيقيين مجموعهما 21 وجداؤهما (-35)

نرمز لهذين العددين بـ: x و y، عندئذ يصبح لدينا:

$$\begin{cases} x + y = 21 \\ x \times y = -35 \end{cases}$$

وهذا يعني أن:

$$\begin{cases} y = 21 - x \\ x^2 - 21x - 35 = 0 \end{cases} \ldots\ldots\ldots (1)$$

ليكن Δ مميز المعادلة (1)

لدينا:

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

$$\Delta = (-21)^2 - 4(1)(-35)$$
$$= 441 + 140$$
$$= 581$$

وبما أن $\Delta > 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين متمايزين نسميهما x_2, x_1

حيث: $x_1 = \dfrac{21+\sqrt{581}}{2}$ و $x_2 = \dfrac{21-\sqrt{581}}{2}$

ومنه الجملة $\begin{cases} y = 21 - x \\ x^2 - 21x - 35 = 0 \end{cases}$

تكافئ: $(x, y) \in \left\{ \left(\dfrac{21-\sqrt{581}}{2}, \dfrac{21+\sqrt{581}}{2} \right), \left(\dfrac{21+\sqrt{581}}{2}, \dfrac{21-\sqrt{581}}{2} \right) \right\}$

2) تعيين بعدي مستطيل علما أن محيط هذا المستطيل هو $9{,}10cm$ ومساحته $4{,}125cm^2$

نرمز لهذا البعدين بـ: x, y حيث: $x > 0$ و $y > 0$ عندئذ يصبح لدينا:

$$\begin{cases} 2(x+y) = 9{,}10 \\ xy = 4{,}125 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

وبنفس الكيفية المتبعة في الفرع السابق نجد أن:

$y = \dfrac{4{,}55 + \sqrt{4{,}7025}}{2}$ و $x = \dfrac{4{,}55 - \sqrt{4{,}7025}}{2}$

جميع الحقوق محفوظة ©

التمرين 13:

تعيين x

ليكن y سعر البضاعة سنة 1990 وليكن P_{1992} سعر البضاعة سنة 1992

عندئذ: $P_{1992} = y + \frac{x}{100} y$

$$= \frac{100+x}{100} y$$

ليكن P_{1994} سعر البضاعة سنة 1994

عندئذ:

$$P_{1994} = P_{1992} + \frac{x+2}{100} P_{1992}$$

$$= \frac{x+102}{100} P_{1992}$$

$$= \frac{x+102}{100} \times \frac{x+100}{100} . y .....(1)$$

وبما أنه بين السنتين 1990 و1994 إزداد سعر البضاعة بنسبة قدرها 23,2% فإن:

$$P_{1994} = y + \frac{23,2}{100} y$$

$$= \frac{123,2}{100} y .....(2)$$

وعليه: من (1) و(2) نجد:

$$\frac{x+102}{100} \times \frac{x+100}{100} y = \frac{123,2}{100} y$$

وهذا يكافئ: $(x+102)(x+100) = 12320$

وهذا يعني أن: $x^2 + 202x - 2120 = 0 .....(3)$

ليكن Δ مميز المعادلة (3) عندئذ:

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

$$\Delta = (202)^2 - 4(1)(-2120)$$
$$= 40804 + 8480$$
$$= 49284$$

وبما أن $\Delta > 0$ فإن المعادلة (3) تقبل حلين متمايزين نسميهما x_1 و x_2 حيث:

$$x_1 = \frac{-202 + \sqrt{49284}}{2} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-202 - \sqrt{49284}}{2}$$

$$x_1 = 20 \quad \text{و} \quad x_2 = -212$$

وبما أن السعر إزداد فإن الإمكانية أن يأخذ x القيمة السابقة غير واردة ومنه

$$x = 20$$

التمرين 14:

نسمي عدد الحقائب التي يصنعها هشام في اليوم

ونسمي T عدد المقلمات التي يصنعها هشام في اليوم

والعددان مرتبطان بالعلاقة: $S^2 + 25 + 4T = 80$

1) جاد أكبر عدد ممكن من المقلمات التي يمكن للسيد هشام أن يصنعها في يوم واحد.

المساواة: $S^2 + 25 + 4T = 80$

تكافئ: $T = -\frac{1}{4}S^2 - \frac{1}{2}S + 20$

لتكن f الدالة المعرفة على R بالدستور:

جميع الحقوق محفوظة ©

جدول تغيرات الدالة f يتمثل في التالي:

S	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(S)$	↗	$20,25$	↘

ولكن $S \geq 0$ لأن S يمثل عدد الحقائب

ومن أجل $S = 0$ نجد: $f(0) = 20$

بمعنى في حالة ما إذا لم يصنع الحرفي هشام أي حقيبة يكون عدد المقلمات هو: $f(0)$ أي هو 20.

ومنه أكبر عدد ممكن من المقلمات يمكن للحرفي هشام أن يصنعه هو20

2) يجاد أكبر عدد ممكن من الحقائب التي يمكن للسيد هشام أن يصنعها في يوم واحد

المساواة: $S^2 + 25 + 4T = 80$

تكافئ: $(S+1)^2 - 1 + 4T = 80$

وهذا يعني: $(S+1)^2 = 81 - 4T$

العدد: $(81-4T)$ موجب لأنه حسب الفرع السابق، أكبر قيمة لـ T هي 20

ومن أجل هذه القيمة يصبح: $81 - 4T = 1$

ومنه:

المساواة: $(S+1)^2 = 81 - 4T$

تكافئ: $S + 1 = \sqrt{81-4T}$ أو $S + 1 = -\sqrt{81-4T}$

وهذا يعني أن: $S = -1 + \sqrt{81-4T}$ أو $S = -1 - \sqrt{81-4T}$

ولكن: $\left(-1 - \sqrt{81-4T}\right) < 0$

ومنه الاحتمال الوارد هو: $S = -1 + \sqrt{81-4T}$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

واكبر قيمة للمقدار $\sqrt{81-4T}$ تكون من أجل $T=0$

وفي هذه الحالة يصبح لدينا: $S=-1+\sqrt{81}$
$=8$

ومنه: أكبر عدد ممكن من الحقائب يمكن للحرفي هشام أن يصنعه هو 8.

التمرين 15:

1) تعيين ثلاثة حدود متتابعة من متتالية حسابية علما أن مجموع هذه الحدود يساوي 27 وجدائها يساوي (-567)

نسمي هذه الحدود a,b,c (من اليسار إلى اليمين) عندئذ:

$$\begin{cases} a+b+c=27 \\ a\times b\times c=-567 \end{cases}$$

وهذا يعني أن: $\begin{cases} a+b+c=27 \\ a+c=2b \\ a\times b\times c=-567 \end{cases}$

أي أن: $\begin{cases} a+c=18 \\ a\times c=-63 \end{cases}$

وهذا يعني أن: $\begin{cases} c=18-a \\ a^2-18a-63=0 \end{cases}$

ومنه: $(a,b,c)\in\{(-3,9,21),(21,9,3)\}$

2) تعيين ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية علما أن الحد الثاني من هذه الحدود هو 6 ومجموع هذه الحدود يساوي 19.

نسمي هذه الحدود: x,y,z بهذا الترتيب، عندئذ:

$$\begin{cases} y=6 \\ x+y+z=19 \end{cases}$$

أي أن: $\begin{cases} y=6 \\ x+z=13 \end{cases}$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

ليكن r أساس هذه المتتالية عندئذ: حسب التعريف نجد:

$z = r \times y$ و $y = r \times x$

ومنه: $z = 6r$ و $x = \frac{6}{r}$

وعليه: $\begin{cases} y = 6 \\ \frac{6}{r} + 6r = 13 \end{cases}$

أي أن: $\begin{cases} y = 6 \\ 6r^2 - 13r + 6 = 0 \end{cases}$ .....(1)

من (1) نجد أن: $r = \frac{3}{2}$ أو $r = \frac{2}{3}$

وعليه: لما: $r = \frac{3}{2}$ نجد: $x = 4$ و $z = 9$

ولما $r = \frac{2}{3}$ نجد: $x = 9$ و $z = 4$

ومنه: $(x, y, z) \in \{(9,6,4),(4,6,9)\}$.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©